

# Nombre de rotation presque sûr des endomorphismes du cercle affines par morceaux

Sylvain Crovisier

**Résumé.** Nous définissons le nombre de rotation presque sûr de certains endomorphismes du cercle de degré un. C'est le nombre de rotation de presque tout point du cercle. Nous l'étudions pour certaines applications affines par morceaux dilatantes. Nous montrons que sa dépendance en les paramètres est höldérienne pour tout exposant  $0 < \alpha < 1$  mais n'est en général pas lipschitzienne. En particulier, l'ensemble des paramètres pour lesquels le nombre de rotation presque sûr est irrationnel a une dimension de Hausdorff égale à 1.

**Mots-clés:** endomorphisme du cercle dilatant, nombre de rotation, mesure SRB.

**Abstract.** We define the almost sure rotation number for some degree one endomorphisms over the circle. It is the rotation number for almost any point of the circle. We describe it for a particular family of expanding piecewise affine endomorphisms. We show that its dependance on the parameters is Hölder for any exposant  $0 < \alpha < 1$  but in general not Lipschitz. In particular the set of parameters which give an irrational almost sure rotation number has a Hausdorff dimension equal to 1.

**Keywords:** expanding endomorphism of the circle, rotation number, SRB measure.

**Mathematical subject classification:** 37C40, 37E10, 37E45.

## 1 Introduction

**1.1** Considérons le cercle  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et le revêtement  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^1$ . Le relevé à  $\mathbb{R}$  d'un point  $x \in \mathbb{T}^1$  sera généralement noté  $\tilde{x}$ .

Un **endomorphisme**  $f$  est une application continue et de degré un envoyant le cercle sur lui-même: il existe un relevé  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est continu et vérifie:

$$\begin{aligned} \pi \circ \tilde{f} &= f \circ \pi, \\ \forall \tilde{x}, \quad \tilde{f}(\tilde{x} + 1) &= \tilde{f}(\tilde{x}) + 1. \end{aligned}$$

En particulier, pour tout réel  $\omega$ , nous introduisons la translation  $\tilde{r}_\omega : \tilde{x} \mapsto \tilde{x} + \omega$  qui est un relevé de la rotation  $r_\omega$  sur le cercle.

**1.2** Pour un choix d'endomorphisme et d'un relevé  $\tilde{f}$ , le comportement en rotation d'un point  $x$  du cercle est caractérisé par la suite

$$(E_n(\tilde{f}, x))_n = \left( \frac{\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x}}{n} \right)_n.$$

Nous introduisons les familles  $(f_\omega) = (r_\omega \circ f)$  et  $(\tilde{f}_\omega) = (\tilde{r}_\omega \circ \tilde{f})$  dans le but de comprendre le comportement asymptotique de la suite  $(E_n(\tilde{f}_\omega, x))_n$  pour un paramètre  $\omega$  et un point  $x$  génériques.

**1.3** Dans le cas où  $f$  est un difféomorphisme, nous rappelons que la suite  $(E_n(\tilde{f}, x))_n$  converge vers le nombre de rotation  $\rho(\tilde{f})$  de  $\tilde{f}$ , qui ne dépend pas de  $x$ . M. Herman a montré d'une part (voir [H77]) que si  $f$  est générique, le nombre de rotation de  $f_\omega$  est rationnel pour tout paramètre  $\omega$  appartenant à un ouvert dense de  $\mathbb{R}$  et d'autre part (voir [H79]) que si  $f$  est de classe  $C^3$ , l'ensemble des paramètres  $\omega$  pour lesquels  $\rho(\tilde{f}_\omega)$  est irrationnel est un sous-ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive (voir aussi [Ar]). Plusieurs améliorations ont été apportées depuis (voir [Ś88, T92, G93, GrŚ]).

**1.4** Nous nous intéressons dorénavant au cas où  $f$  est un endomorphisme non-inversible. La suite  $(E_n(\tilde{f}, x))_n$  ne converge pas toujours et nous notons  $\rho(\tilde{f}, x)$  ses valeurs d'adhérence. La réunion

$$\mathcal{R}(\tilde{f}) = \bigcup_{x \in \mathbb{T}^1} \rho(\tilde{f}, x)$$

est l'**ensemble de rotation** de  $\tilde{f}$  (voir [NPT]). D'après [CGT], c'est un intervalle compact que nous noterons  $[\rho^-(\tilde{f}), \rho^+(\tilde{f})]$ . Les fonctions  $\omega \mapsto \rho^-(\tilde{f}_\omega)$  et  $\omega \mapsto \rho^+(\tilde{f}_\omega)$  sont continues et croissantes. G. Świątek a montré (voir [Ś89]) pour certaines classes d'endomorphismes bimodaux du cercle et en particulier pour la famille d'Arnol'd

$$\tilde{x} \mapsto \tilde{x} + a \sin(2\pi \tilde{x}) + \omega, \quad \left( a > \frac{1}{2\pi} \right),$$

que pour un ensemble des paramètres  $\omega$  de mesure de Lebesgue strictement positive,  $\rho^-(\tilde{f}_\omega)$  et  $\rho^+(\tilde{f}_\omega)$  sont rationnels.

**1.5** Du point de vue de la théorie ergodique, l'intervalle de rotation ne contient pas toute l'information: supposons par exemple que  $f$  admette une mesure SRB ou plus particulièrement, que  $f$  possède une mesure  $\mu$  ergodique invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue avec un exposant de Lyapounov strictement positif et dont le support est  $\mathbb{T}^1$  entier. Dans ce cas (voir [Le]) cette mesure est unique et Lebesgue-presque tout point  $x \in \mathbb{T}^1$  est générique pour  $\mu$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)} \rightarrow \mu,$$

où  $\delta_{x'}$  est la mesure de Dirac en  $x'$ . En particulier, la suite  $(E_n(\tilde{f}, x))_n$  converge vers un unique nombre  $\rho_0 \in \mathcal{R}(\tilde{f})$ , égal à

$$\rho_0 = \int_{[0,1]} (\tilde{f} - \text{Id}) \, d\mu.$$

Nous l'appellerons **nombre de rotation presque sûr** ou “physique” de  $\tilde{f}$ .

Par analogie avec les travaux cités ci-dessus, nous nous intéressons à des arcs d'endomorphismes de la forme

$$\tilde{f}_\omega = \tilde{r}_\omega \circ \tilde{f}$$

vérifiant la propriété suivante:

*Pour un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  de mesure de Lebesgue strictement positive,  $\Omega$ , les applications  $f_\omega$  avec  $\omega \in \Omega$  possèdent une mesure*

- (P)  *$\mu_\omega$  ergodique invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, supportée par le cercle  $\mathbb{T}^1$  entier et avec un exposant de Lyapounov strictement positif.*

Le problème qui apparaît naturellement est de comprendre l'application qui à  $\omega \in \Omega$  associe le nombre de rotation presque sûr  $\rho_0(\omega)$  de  $\tilde{f}_\omega$ . Plus précisément:

1. Quelle est la régularité de l'application  $\omega \mapsto \rho_0(\tilde{f}_\omega)$ ?
2. Le nombre de rotation presque sûr  $\rho_0(\tilde{f}_\omega)$  est-il irrationnel pour un sous-ensemble de paramètres  $\Omega' \subset \Omega$  de mesure strictement positive?

**1.6** Grâce au théorème de Jakobson et à ses généralisations (voir [J, T93, WY]), on peut montrer que l'hypothèse (P) est satisfaite par des classes d'endomorphismes assez larges et en particulier par la famille d'Arnol'd. Cependant, la mesure absolument continue est construite de façon indirecte comme mesure

invariante d'une application induite dilatante. Pour simplifier notre étude nous nous limitons aux applications dilatantes et plus précisément à la classe des applications affines par morceaux:

Pour  $\lambda \geq 1$  et  $\omega \in \mathbb{R}$  on définit  $\tilde{f}_{\lambda, \omega}$  vérifiant:

1. Pour  $x \in \left[0, \frac{1+\lambda}{2\lambda}\right]$ ,  $\tilde{f}_{\lambda, \omega}(x) = \lambda x + \omega$ .

2. Pour  $x \in \left[\frac{1-\lambda}{2\lambda}, 0\right]$ ,  $\tilde{f}_{\lambda, \omega}(x) = -\lambda x + \omega$ .

3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{f}_{\lambda, \omega}(x+1) = \tilde{f}_{\lambda, \omega}(x) + 1$ .

Les points  $\tilde{c}_0 = 0$  et  $\tilde{c}'_0 = \frac{1+\lambda}{2\lambda}$  jouent maintenant le rôle des **points critiques** (voir figure 1).

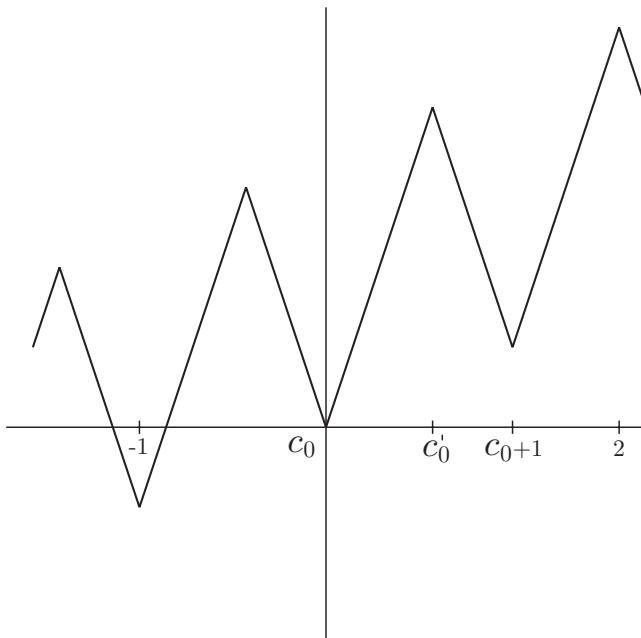


Figure 1: Graphe de l'application  $\tilde{x} \mapsto \tilde{f}_{\lambda, \omega}(\tilde{x})$ .

Remarquons que l'étude d'applications affines par morceaux sur le cercle et de leur nombre de rotation a déjà été menée par M. Herman ainsi que par E. Ghys et V. Sergiescu (voir [H79, GhS]) mais dans le cas d'homéomorphismes uniquement. On sait également que tout endomorphisme bimodal du cercle est semi-conjugué à l'une des applications  $f_{\lambda, \omega}$  (voir [MT, ALM]).

**1.7** Il est facile de montrer (lemme 1) que pour tout  $\lambda \geq 3$ , les familles  $(f_{\lambda,\omega})_\omega$  satisfont l'hypothèse (P) avec  $\Omega = \mathbb{R}$ .

Notre résultat principal décrit la régularité des applications  $\omega \mapsto \rho_0(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$ :

**Théorème 1.** *Les applications  $\omega \mapsto \rho_0(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$ ,  $\lambda \geq 3$ , sont höldériennes d'exposant  $\alpha$  pour tout  $0 < \alpha < 1$ . Plus précisément, elles admettent un module de continuité  $C.\omega|\log(\omega)|$ .*

On en déduit le corollaire suivant:

**Corollaire 1.** *Pour  $\lambda \geq 3$ , l'ensemble des paramètres  $\omega$  pour lesquels  $\rho_0(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  est irrationnel est un ensemble de dimension de Hausdorff égale à 1.*

Nous montrons par ailleurs que les exposants  $\alpha$  du théorème 1.7 sont optimaux puisqu'il existe une pente  $\lambda \geq 3$  pour laquelle  $\omega \mapsto \rho_0(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  n'est pas lipschitzienne.

**1.8** Nous montrerons ailleurs avec des techniques différentes que l'ensemble des paramètres  $(\lambda, \omega)$  pour lesquels  $\rho_0(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  est irrationnel est de mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^2$  strictement positive et que les applications  $\omega \mapsto \rho_0(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  ne sont généralement pas absolument continues (voir aussi [Cr]).

**1.9** Nous obtenons les propriétés de régularité du nombre de rotation presque sûr en étudiant la dépendance de la mesure absolument continue  $\mu$  par rapport aux paramètres. La mesure  $\mu$  se met sous la forme

$$\mu = h.m,$$

où  $m$  est la mesure de Haar du cercle et  $h$  une fonction positive de  $L^1(\mathbb{T}^1)$ . On sait que l'on peut obtenir  $h$  comme point fixe de l'opérateur de Perron-Frobenius  $\mathcal{L}$  sur  $L^1(\mathbb{T}^1)$ . Pour obtenir de bonnes propriétés sur  $\mu$ , on cherche usuellement à montrer une propriété de trou spectral pour l'opérateur qui isole la valeur propre 1. C'est la raison pour laquelle on se place en général sur un espace fonctionnel plus petit, stable par l'opérateur, par exemple l'espace des fonctions à variation bornée,  $BV(\mathbb{T}^1)$ .

Remarquons que dans le cas d'un système dynamique donné par une application affine par morceaux  $f$ , l'opérateur stabilise un espace plus petit qui est moralement l'espace des fonctions constantes par morceaux à discontinuités le long de l'ensemble post-critique. C'est du moins ce que l'on observe si l'on travaille avec une application markovienne. Dans ce cas, l'espace associé est de dimension finie. On observe également que l'opérateur n'est pas continu en  $f$  pour la norme de  $BV(\mathbb{T}^1)$ .

Ces deux remarques nous conduisent à considérer un opérateur  $\widehat{\mathcal{L}}$  qui agit sur un "espace symbolique"  $E(u)$ . L'espace  $E(u)$ , cette fois, ne dépend plus de  $f$  et

s’envoie dans  $\text{BV}(\mathbb{T}^1)$  selon une application  $i$ . Les applications  $\widehat{\mathcal{L}}$  et  $i$  dépendent de  $f$  mais on a gagné des propriétés de continuité. Cette idée d’introduire un tel espace est inspirée de l’article de Tsujii [T00].

Nous introduisons l’espace  $E(u)$  et l’opérateur  $\widehat{\mathcal{L}}$  en section 3. En section 4, nous étudions les mesures absolument continues invariantes et montrons qu’elles dépendent continûment des paramètres. Nous améliorons ce résultat et prouvons les régularités höldériennes en section 5. Nous montrons que le nombre de rotation presque sûr n’est en général pas lipschitzien en section 5.3.

## 2 Préliminaires

### 2.1 Convention: l’ordre sur le cercle

Nous ferons quelques abus de notation:

- Si  $x, y$  sont deux points du cercle, il existe toujours des relevés  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  tels que  $\tilde{x} \leq \tilde{y} < \tilde{x} + 1$ . On notera  $[x, y]$  l’intervalle du cercle  $\pi([\tilde{x}, \tilde{y}])$  qui ne dépend pas du choix des relevés.
- Si deux points du cercle  $x, y$  possèdent des relevés  $\tilde{x}, \tilde{y}$  à  $\mathbb{R}$  contenus dans un même intervalle  $[\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0[, ]\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0], [\tilde{c}'_0, \tilde{c}_0 + 1[, ou ]\tilde{c}'_0, \tilde{c}'_0 + 1]$ , on notera  $x < y$  lorsque  $\tilde{x} < \tilde{y}$ . Là encore, cette relation ne dépend pas du choix des relevés.

Si  $I$  est un intervalle du cercle ou de  $\mathbb{R}$ , nous noterons  $|I|$  pour sa longueur.

### 2.2 Unicité de la mesure $\mu$

Les applications affines par morceaux dilatantes sont bien connues en théorie ergodique puisque l’on sait ([LaY]) qu’elles admettent des mesures absolument continues invariantes ergodiques dont le support est une union finie d’intervalles (voir [Le, T93]) et dont l’union des bassins est de mesure de Lebesgue totale.

Dans le cas de la famille  $(f_{\lambda, \omega})$ , on obtient:

**Lemme 1.** *Pour  $\lambda > 2$ , les applications  $f_{\lambda, \omega}$  possèdent une unique mesure absolument continue.*

*Pour  $\lambda \geq 3$ , la famille  $(f_{\lambda, \omega})$  vérifie la propriété (P) avec  $\Omega = \mathbb{R}$ .*

**Démonstration.** Lorsque la pente  $\lambda$  est strictement plus grande que 2, on remarque que pour tout sous-intervalle  $I \subset \mathbb{T}$  non trivial,  $|f_{\lambda, \omega}(I)| > |I|$  sauf si  $I$  contient les deux points critiques. Il y a donc exactement une mesure de probabilité invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Lorsque la pente est strictement plus grande que 3, la relation  $|f_{\lambda, \omega}(I)| > |I|$

est vérifiée pour tout sous-intervalle non trivial et le support de la mesure est  $\mathbb{T}^1$  tout entier. Le cas  $\lambda = 3$  résulte de l'exemple 1 suivant.  $\square$

### 2.3 Exemples

1. Pour  $\lambda = 2n + 1$  avec  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on a

$$\tilde{f}_{\lambda, \omega} \left( \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \right) = \frac{\lambda + 1}{2} + \omega = n + 1 + \omega = \tilde{f}_{\lambda, \omega}(0) + n + 1.$$

On remarque ainsi que la mesure de Haar du cercle est invariante. On en déduit

$$\rho_0(\tilde{f}_{\lambda, \omega}) = \frac{\lambda^2 - 1}{4\lambda} + \omega,$$

et  $\rho_0(\tilde{f}_{\lambda, \omega}) - \omega$  est constante en  $\omega$ .

2. La figure 2 représente le graphe de  $\rho_0$  pour  $\lambda = 3.5$ . On a représenté également l'intervalle de rotation

$$\mathcal{R}(\tilde{f}_{\lambda, \omega}) = [\rho_{\omega}^-, \rho_{\omega}^+].$$

**Remarque 2.1.** Il est facile de voir sur un exemple que  $\rho_0$  n'est pas croissante: l'application  $f_{\lambda, \omega}$  est markovienne lorsque  $\lambda$  est entier et  $\omega$  de la forme  $m\lambda^{-n}$ , où  $n$  et  $m$  sont des entiers. C'est le cas par exemple pour  $\lambda = 4$  et  $\omega = \frac{10}{32}$ . La mesure  $\mu$  est constante sur chaque intervalle de la partition du cercle

$$c_0 < c'_2 < c_1 < c_2 = c_3 = c'_3 < c'_0 < c'_1 < c_0.$$

La densité de  $\mu$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur chaque intervalle est constante et respectivement égale à:

$$\frac{2}{6}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}.$$

Le nombre de rotation se calcule facilement et est égal à  $\frac{352}{256}$ .

Pour  $\omega = \frac{11}{32}$  la partition est

$$c_0 < c_4 = c_5 < c_1 < c_3 = c'_3 < c'_0 < c_2 < c'_1 < c'_2 < c_0$$

et la densité associée est

$$\frac{7}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{5}{32}, \frac{3}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}.$$

Le nombre de rotation est cette fois  $\frac{351}{256}$ .

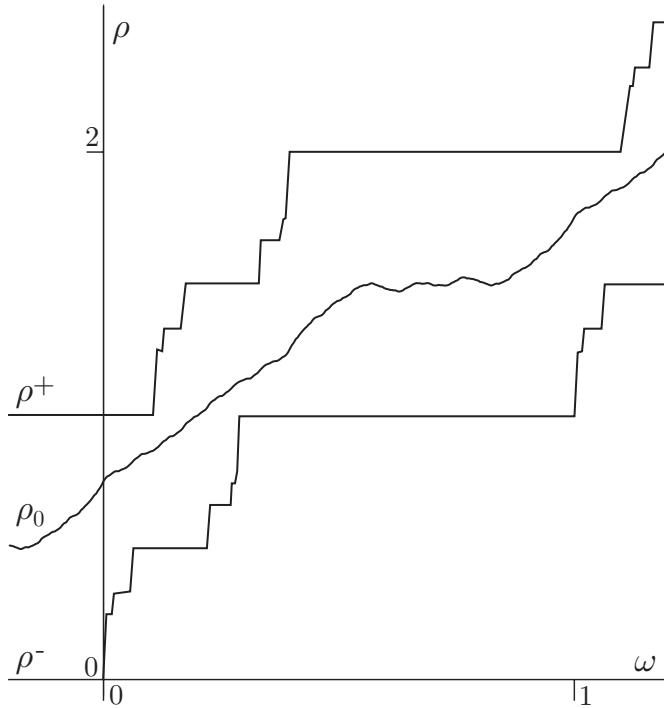


Figure 2: Courbes de rotation  $\rho^-$ ,  $\rho_0$ , et  $\rho^+$  pour la pente  $\lambda = 3.5$ .

### 3 L'espace symbolique

#### 3.1 Définition de l'espace symbolique

3.1.1 Si  $h$  est une application du cercle  $\mathbb{T}^1$  à valeurs réelles et si

$$\mathbb{T}^1 = [x_0, x_1[ \cup [x_1, x_2[ \cup \cdots \cup [x_{r-1}, x_r[, \quad (x_r = x_0)$$

est une partition du cercle, la variation de  $h$  selon la subdivision  $(x_i)$  est la quantité:

$$V(h, (x_i)) = \sum_{i=0}^{r-1} |h(x_{i+1}) - h(x_i)|.$$

La variation de  $h$  est alors  $V(h) = \sup_{(x_i)} V(h, (x_i))$ . Les **applications à variation bornée** du cercle sont les applications  $h : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  continues à droite et à variation  $V(h)$  finie. On définit la norme

$$\|h\|_{BV} = V(h) + \|h\|_\infty$$

qui fait de l'ensemble de applications à variation bornée  $\text{BV}(\mathbb{T}^1)$  un espace de Banach.

**3.1.2** Pour chaque application  $f_{\lambda,\omega}$ , nous noterons  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les orbites critiques et nous dirons que l'application  $f_{\lambda,\omega}$  possède une **collision d'ordre  $n \geq 1$**  si les ensembles  $\{c_n, c'_n\}$  et  $\{c_0, c'_0\}$  s'intersectent.

Pour la suite, on fixe une constante  $1 < u < \frac{\lambda}{2}$ . Notons  $E_1(u)$  le sous-espace de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*} \times \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$  formé des éléments  $(v, (s_n), (s'_n))$  tels que

$$\|(v, (s_n), (s'_n))\| = |v| + \sum_{n \geq 1} (|s_n| + |s'_n|)u^n < \infty.$$

Ceci définit une norme sur  $E_1(u)$  qui en fait un espace de Banach. L'**espace symbolique  $E(u)$**  est le noyau dans  $E_1(u)$  de la forme linéaire

$$(v, (s_n), (s'_n)) \mapsto \sum_{n \geq 1} (s_n + s'_n).$$

Les  $s_n$  et  $s'_n$  seront les sauts des discontinuités qui apparaissent en  $c_n$  et  $c'_n$ .

**3.1.3** Nous faisons maintenant l'hypothèse que

$$\forall n \geq 1, c_n, c'_n \notin \{c_0, c'_0\}. \quad (3.1)$$

On pose pour tout  $n \geq 1$

$$\eta_n = \begin{cases} 1, & \text{si } c_0 < c_n < c'_0, \\ -1, & \text{si } c'_0 < c_n < c_0. \end{cases}$$

pour l'ordre cyclique. On définira de façon analogue les symboles  $(\eta'_n)$  associés à l'orbite de  $c'_0$ .

**3.1.4** On associe alors à  $(v, (s_n), (s'_n)) \in E(u)$  la fonction

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto v + \int_{[0, x]} \sum_{n \geq 1} (s_n \delta_{c_n} + s'_n \delta_{c'_n}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

où  $\delta_x$  désigne la mesure de Dirac en  $x$ . Elle définit par périodicité une application  $i(v, (s_n), (s'_n)) \in \text{BV}(\mathbb{T}^1)$  de norme majorée par

$$\|i(v, (s_n), (s'_n))\|_{\text{BV}} \leq |v| + 2 \sum_{n \geq 1} (|s_n| + |s'_n|).$$

Et  $i : E(u) \rightarrow \text{BV}(\mathbb{T}^1)$  est continue. Sa norme est inférieure à 2.

**Remarque 3.1.** Quitte à quotienter par les fonctions constantes,  $\text{BV}(\mathbb{T}^1)$  est isomorphe à l'espace des mesures de Radon réelles sur  $\mathbb{T}^1$ . C'est en fait ce dernier espace qui apparaît dans la formule (3.2).

**3.1.5** En général  $i$  n'est pas injective, cependant:

**Proposition 1.** *Si les  $c_n$  et  $c'_n$ ,  $n, n' \geq 1$  sont deux à deux distincts, l'application  $i$  est injective.*

**Démonstration.** On retrouve  $(v, (s_n), (s'_n))$  à partir de  $h = i(v, (s_n), (s'_n))$  en posant

$$v = h(c_0), \quad s_n = \lim_{(c_n)^+} h - \lim_{(c_n)^-} h, \quad \text{et } s'_n = \lim_{(c'_n)^+} h - \lim_{(c'_n)^-} h. \quad \square$$

**3.1.6** Dans le cas général où l'on ne suppose pas que la propriété (3.1) est satisfaite, nous considérons cette fois plusieurs applications  $i$ : lorsque  $c_n \in \{c_0, c'_0\}$  (resp.  $c'_n \in \{c_0, c'_0\}$ ), on doit choisir  $\eta_n \in \{-1, 1\}$  (resp.  $\eta'_n \in \{-1, 1\}$ ) pour définir ensuite

$$i(v, (s_n), (s'_n))(x) = v + \sum_{\substack{c_0 \leq c_n < x \\ (c_n \neq c_0) \text{ ou } (\eta_n = 1)}} s_n + \sum_{\substack{c_0 \leq c'_n < x \\ (c'_n \neq c_0) \text{ ou } (\eta'_n = 1)}} s'_n. \quad (3.3)$$

Autrement dit, on obtient  $i(v, (s_n), (s'_n))(x)$  à partir de  $i(v, (s_n), (s'_n))(c_0)$  en ajoutant les sauts situés entre  $c_0$  et  $x$  et on pense à  $v$  comme étant la “valeur symbolique” de  $h$  en  $c_0$ . La définition (3.3) coïncide avec la définition (3.2) lorsque l'hypothèse (3.1) est vérifiée.

**3.1.7** On définit également l'intégrale

$$I(v, (s_n), (s'_n)) = \int_{\mathbb{T}^1} i(v, (s_n), (s'_n)) \, dm$$

et pour tout  $x \in \mathbb{T}^1$ , les évaluations

$$\begin{aligned} e_x^-(v, (s_n), (s'_n)) &= \lim_{x^-} i(v, (s_n), (s'_n)), \\ e_x^+(v, (s_n), (s'_n)) &= \lim_{x^+} i(v, (s_n), (s'_n)), \end{aligned}$$

qui sont des formes linéaires continues sur  $E(u)$ .

**Remarque 3.2.** Il pourrait sembler plus naturel de représenter symboliquement les fonctions par un triplet  $(I, (s_n), (s'_n))$ , où  $I$  est l'intégrale de la fonction et  $(s_n)$  et  $(s'_n)$  les sauts. Pour expliciter l'opérateur de Perron-Frobenius, il sera cependant plus simple de travailler avec les triplets  $(v, (s_n), (s'_n))$ .

### 3.2 L'opérateur de Perron-Frobenius symbolique

**3.2.1** Nous rappelons que l'opérateur de Perron-Frobenius  $\mathcal{L}$  sur  $L^1(\mathbb{T}^1)$  associe à tout  $h \in L^1(\mathbb{T}^1)$  la fonction  $\mathcal{L}.h \in L^1(\mathbb{T}^1)$ , définie par:

$$\mathcal{L}.h(x) = \sum_{f(y)=x} \frac{h(y)}{|\mathbf{D}f(y)|}.$$

**3.2.2** Nous supposerons à nouveau que l'hypothèse (3.1) est satisfaite. On peut considérer la forme linéaire

$$e_{c'_0}(v, (s_n), (s'_n)) = v + \sum_{\eta_n=1} s_n + \sum_{\eta'_n=1} s'_n. \quad (3.4)$$

On remarque que  $e_{c'_0} = e_{c'_0}^+ = e_{c'_0}^-$  et on notera parfois

$$v' = e_{c'_0}(v, (s_n), (s'_n)).$$

À chaque  $(v, (s_n), (s'_n)) \in E(u)$  on associe,

$$\widehat{\mathcal{L}}(v, (s_n), (s'_n)) = (w, (r_n), (r'_n))$$

tel que

$$r_1 = \frac{2v}{\lambda}, \quad r'_1 = \frac{-2v'}{\lambda}, \quad (3.5)$$

$$r_{n+1} = \frac{\eta_n s_n}{\lambda}, \quad r'_{n+1} = \frac{\eta'_n s'_n}{\lambda}, \text{ pour } n \geq 1, \quad (3.6)$$

$$w = \sum_{f(y)=c_0} \frac{e_y^-(v, (s_n), (s'_n))}{\lambda}. \quad (3.7)$$

Notons que l'on aurait pu tout aussi bien utiliser  $e_y^+$  dans l'expression de  $w$  car du fait de l'hypothèse (3.1),  $e_y^+ = e_y^-$  lorsque  $f(y) = c_0$ .

L'opérateur de Perron-Frobenius symbolique  $\widehat{\mathcal{L}}$  est continu sur  $E(u)$  et vérifie

$$i \circ \widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \circ i. \quad (3.8)$$

Il préserve donc la forme  $I$ .

**3.2.3** Dans le cas où la propriété (3.1) n'est plus satisfaite, nous considérerons plusieurs opérateurs: après avoir choisi  $(\eta_n)$  et  $(\eta'_n)$  comme en sections 3.1.3 et 3.1.6, nous définissons l'application  $i$  comme en 3.1.4 et 3.1.6 et la forme linéaire  $e_{c'_0}$  par la formule (3.4). La "valeur symbolique" de  $h$  en  $c'_0$  est alors  $v' = e_{c'_0}(v, (s_n), (s'_n))$ .

Les expressions des  $r_n$  et  $r'_n$ ,  $n \geq 1$  sont inchangées (formules (3.5) et (3.6)). Il reste à définir  $w$  dans l'expression (3.7): nous calculons  $e_{c_0}^-(w, (r_n), (r'_n))$ :

$$e_{c_0}^-(w, (r_n), (r'_n)) = \sum_{\substack{f(y)=c_0 \\ c_0 \leq y \leq c'_0}} \frac{e_y^-(v, (s_n), (s'_n))}{\lambda} + \sum_{\substack{f(y)=c_0 \\ c'_0 \leq y \leq c_0}} \frac{e_y^+(v, (s_n), (s'_n))}{\lambda}.$$

On pose ensuite

$$w = e_{c_0}^-(w, (r_n), (r'_n)) + \sum_{\substack{c_n=c_0 \\ \eta_n=-1}} r_n + \sum_{\substack{c'_n=c_0 \\ \eta'_n=-1}} r'_n.$$

Dans ce cas encore, l'opérateur  $\widehat{\mathcal{L}}$  est continu et vérifie (3.8). Il généralise la définition donnée en 3.2.2.

**3.2.4** Ayant fixé un choix de suites  $(\eta_n)$  et  $(\eta'_n)$ , nous utiliserons parfois la norme équivalente sur  $E(u)$ :

$$\|(v, (s_n), (s'_n))\|' = 2(|v| + |v'|) + \sum_{n \geq 1} (|s_n| + |s'_n|)u^n.$$

### Remarques 3.3.

1. La relation (3.8) montre que le noyau de  $i$  est préservé par l'opérateur  $\widehat{\mathcal{L}}$ .
2. Les coefficients qui apparaissent dans l'écriture de  $\widehat{\mathcal{L}}$  sont tous dans  $\frac{1}{\lambda} \mathbb{Z}$ . Si l'on écrit que  $I$  est préservée par  $\widehat{\mathcal{L}}$ ,  $w$  s'exprime également sous la forme

$$w = \int_{\mathbb{T}^1} i(v, (r_n), (r'_n)) dm - \int_{\mathbb{T}^1} i(0, (s_n), (s'_n)) dm.$$

3. À des choix différents de symboles  $(\eta_n)$ ,  $(\eta'_n)$  sont associés différentes applications  $i$  et différents opérateurs  $\widehat{\mathcal{L}}$ . Cependant, nous verrons (lemme 6) que certains de ces choix sont meilleurs que d'autres.

## 4 Les mesures invariantes

### 4.1 Existence

Dans cette section on considère une application  $f$ , l'espace symbolique associé,  $E(u)$ , un choix d'application  $i : E(u) \rightarrow \text{BV}(\mathbb{T}^1)$  et un opérateur de Perron-Frobenius symbolique,  $\widehat{\mathcal{L}}$ , sur  $E(u)$ . On montre une propriété de trou spectral pour  $\widehat{\mathcal{L}}$ . On utilisera la notation  $h^- = -\inf(h, 0)$  et  $h^+ = \sup(h, 0)$  pour toute fonction  $h : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Lemme 2.** *Le rayon spectral de l'opérateur  $\widehat{\mathcal{L}}$  en restriction au noyau de  $i$  est strictement inférieur à 1.*

**Démonstration.** En posant  $(w, (r_n), (r'_n)) = \widehat{\mathcal{L}}(v, (s_n), (s'_n))$ , on obtient pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} |r_1| &= \frac{2|v|}{\lambda}, \quad |r'_1| = \frac{2|v'|}{\lambda}, \\ |r_{n+1}| &= \frac{|r_n|}{\lambda}, \quad |r'_{n+1}| = \frac{|r'_n|}{\lambda}. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n \geq 1} (|r_n| + |r'_n|) u^n \leq \frac{u}{\lambda} \sum_{n \geq 1} (|s_n| + |s'_n|) u^n + 2 \frac{|v| + |v'|}{\lambda} \leq \frac{u}{\lambda} \|(v, (s_n), (s'_n))\|'.$$

Par hypothèse, pour tout vecteur  $(v, (s_n), (s'_n))$  dans le noyau de  $i$ , pour tout  $y \in \mathbb{T}^1$ ,  $e_y^-(v, (s_n), (s'_n)) = e_y^+(v, (s_n), (s'_n)) = 0$  donc

$$\sum_{c_n=y} s_n + \sum_{c'_n=y} s'_n = 0.$$

En  $c_0$  (resp.  $c'_0$ ), on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{c_n=c_0 \\ \eta_n=-1}} r_n + \sum_{\substack{c'_n=c_0 \\ \eta'_n=-1}} r'_n &= w = - \sum_{\substack{c_n=c_0 \\ \eta_n=1}} r_n - \sum_{\substack{c'_n=c_0 \\ \eta'_n=1}} r'_n, \\ (\text{resp. } \sum_{\substack{c_n=c'_0 \\ \eta_n=1}} r_n + \sum_{\substack{c'_n=c'_0 \\ \eta'_n=1}} r'_n &= w = - \sum_{\substack{c_n=c'_0 \\ \eta_n=-1}} r_n - \sum_{\substack{c'_n=c'_0 \\ \eta'_n=-1}} r'_n). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$2(|w| + |w'|) \leq \sum_{n \geq 1} (|r_n| + |r'_n|) \leq \frac{u}{\lambda} \|(v, (s_n), (s'_n))\|'.$$

On en déduit donc

$$\|(w, (r_n), (r'_n))\|' \leq \frac{2u}{\lambda} \|(v, (s_n), (s'_n))\|'.$$

On conclut grâce à l'inégalité  $2u < \lambda$ . □

**Proposition 2.** *Le spectre de  $\widehat{\mathcal{L}}$  contient 1 comme valeur propre simple isolée. Le reste du spectre est contenu dans un disque centré en 0 de rayon strictement inférieur à un.*

### Démonstration.

- Soit  $\mathcal{P}$  la projection de  $E(u)$  dans lui même définie par:

$$\mathcal{P}(v, (s_n), (s'_n)) = (v, (s_1, 0, \dots), (s'_1, 0, \dots)).$$

$\mathcal{P} \circ \widehat{\mathcal{L}}$  est un opérateur de rang fini et  $\widehat{\mathcal{L}} - \mathcal{P} \circ \widehat{\mathcal{L}}$  a une norme majorée par  $\frac{u}{\lambda} < 1$ . On sait alors (voir [DS] lemme VIII.8.2) que le spectre de  $\widehat{\mathcal{L}}$  hors du disque  $D(0, \frac{u}{\lambda})$  est constitué d'un nombre fini de valeurs propres de multiplicité finie.

- D'autre part, à tout vecteur propre  $(v, (s_n), (s'_n))$  associé à une valeur propre  $v$  pour  $\widehat{\mathcal{L}}$  correspond une fonction  $h = i(v, (s_n), (s'_n))$ .

Si  $h$  est non nulle, c'est donc un vecteur propre pour  $\mathcal{L}$  de valeur propre  $v$ . Puisque  $\mathcal{L}$  a une norme égale à 1 sur  $L^1$ , on en déduit que  $|v|$  est inférieur ou égal à 1.

Si  $h$  est nulle, le lemme 2 entraîne que  $|v| < 1$ . L'opérateur  $\widehat{\mathcal{L}}$  a donc un rayon spectral inférieur ou égal à 1.

- La suite  $(\widehat{h}_n) = (\frac{1}{n} \sum_{0 \leq k \leq n-1} \widehat{\mathcal{L}}^n(1, (0), (0)))$  ne peut tendre vers 0 puisque la valeur le long de la suite de la forme linéaire  $I$  est constante, égale à 1. Or la somme  $E_p(u)$  des espaces propres associés aux valeurs propres de module 1 est de dimension finie. La suite  $(\widehat{h}_n)$  doit donc avoir des valeurs d'adhérence dans  $E_p(u)$ . Toute valeur d'adhérence est en fait un point fixe de  $\widehat{\mathcal{L}}$ . Donc  $\widehat{\mathcal{L}}$  possède la valeur propre 1.

- La valeur propre 1 est une valeur propre simple: on commence par remarquer qu'il n'y a pas dans  $\text{BV}(\mathbb{T}^1)$  plus d'une fonction réelle positive d'intégrale égale à 1, fixe par  $\mathcal{L}$ . En effet, nous avons vu en section 2.2 que  $f$  possède au plus une mesure de probabilité invariante, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. L'opérateur  $\mathcal{L}$  étant positif, tout point fixe  $h$  se décompose en fonctions positives fixes  $\text{Re}(h)^+$ ,  $\text{Re}(h)^-$ ,  $\text{Im}(h)^+$ ,  $\text{Im}(h)^-$  qui doivent être multiples les unes des autres.

Notons  $h_0$  la fonction réelle positive d'intégrale égale à 1. Si  $\widehat{\mathcal{L}}$  possédait un espace caractéristique associé à la valeur propre 1 de dimension strictement supérieure à 1, il existerait une fonction  $g$  telle que  $\mathcal{L}(g) - g = h_0$ . Ceci est impossible puisque  $\mathcal{L}$  préserve l'intégrale. Ceci montre que l'espace caractéristique associé à la valeur propre 1 pour  $\mathcal{L}$  est de dimension un. Il en est de même pour  $\widehat{\mathcal{L}}$  grâce au lemme 2.

- Il reste à voir que  $\widehat{\mathcal{L}}$  n'a pas d'autre valeur propre de module 1. D'après le lemme 2, il suffit de le voir pour  $\mathcal{L}$ . Mais c'est un résultat classique (voir [Sc] section V.4) dans ce cadre de voir que le spectre périphérique (i.e. contenu dans le cercle unité) est un sous-groupe fini de  $\mathbb{C}^*$ , qui est trivial lorsque la dynamique est topologiquement mélangeante. (La section 2.2 montre que c'est le cas lorsque  $\lambda \geq 4$ .)  $\square$

### Remarques 4.1.

1. Au passage, nous avons redémontré l'existence de la mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. D'après la section 2.2, elle est ergodique et son support est  $\mathbb{T}^1$ .
2. Considérons un opérateur de Perron-Frobenius  $\widehat{\mathcal{L}}(0)$  et son point fixe normalisé  $(v(0), (s_n(0)), (s'_n(0)))$ . La proposition 2 entraîne que  $\widehat{\mathcal{L}}(0)^n \cdot (1, 0, 0)$  converge à vitesse exponentielle vers le point fixe: il existe  $0 < \tau < 1$  et  $C > 0$  tels que tout opérateur de Perron-Frobénius  $\widehat{\mathcal{L}}$  proche de  $\widehat{\mathcal{L}}(0)$ , ayant un point fixe normalisé  $(v, (s_n), (s'_n))$ ,

$$\|\widehat{\mathcal{L}}^k \cdot (1, 0, 0) - (v, (s_n), (s'_n))\| \leq C \tau^k.$$

## 4.2 Continuité

La proposition suivante exprime que le graphe de  $\widehat{\mathcal{L}}$  est fermé.

**Proposition 3.** *Pour la norme des opérateurs, l'ensemble des opérateurs de Perron-Frobenius symboliques associés à une application  $f$  est compact. Sa dépendance en  $f$  est semi-continue supérieurement: si  $(f(l))$  est une suite*

*d'applications convergeant vers  $f$  et  $\widehat{\mathcal{L}}(l)$  une suite d'opérateurs de Perron-Frobenius associés, il existe une sous-suite qui converge vers un opérateur de Perron-Frobenius  $\widehat{\mathcal{L}}$  de  $f$ .*

**Démonstration.** La convergence uniforme de  $(f(l))$  vers  $f$  est équivalente à la convergence dans l'espace des paramètres de la suite associée,  $(\lambda(l), \omega(l))$  vers  $(\lambda, \omega)$ .

Considérons l'ensemble  $\mathcal{P}(\Lambda, \Omega)$  des triplets  $(\lambda, \omega, (\eta_n), (\eta'_n))$  tels que  $\lambda$  et  $\omega$  appartiennent à des ensembles compacts  $\Lambda$  et  $\Omega$  contenus dans  $]2, +\infty[$  et  $\mathbb{R}$  respectivement et tels que  $(\eta_n)$  et  $(\eta'_n)$ , appartenant à  $\{-1, +1\}^{\mathbb{N}^*}$  muni de la topologie produit, soient des suites de symboles admissibles pour l'application  $\tilde{f}_{\lambda, \omega}$ . L'ensemble  $\mathcal{P}(\Lambda, \Omega)$  est compact et l'application qui à  $(\lambda, \omega, (\eta_n), (\eta'_n)) \in \mathcal{P}(\Lambda, \Omega)$  associe l'opérateur  $\widehat{\mathcal{L}}$  est continue.  $\square$

**Corollaire 2.** *Pour la topologie vague, la mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mu = h.m$  dépend continûment de  $f$ . Plus précisément, la densité  $h$  dépend continûment de  $f$  dans chaque espace  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ .*

**Démonstration.** Soit  $(f(l))$  une suite d'applications tendant vers  $f$ ,  $(\mu(l)) = (h(l).m)$  la suite des mesures correspondantes et  $(i(l), \widehat{\mathcal{L}}(l))$  un choix d'opérateurs de Perron-Frobenius symboliques. On note  $(I(l))$  les formes d'intégration associées (voir 3.1.7). Quitte à extraire, on peut supposer que  $\widehat{\mathcal{L}}(l) \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$  et  $I(l) \rightarrow I$ . La proposition 2 montre que si les triplets  $(v(l), (s_n(l)), (s'_n(l)))$  et  $(v, (s_n), (s'_n))$  normalisés par  $I(l)$  et  $I$  sont les vecteurs propres de  $\widehat{\mathcal{L}}(l)$  et  $\widehat{\mathcal{L}}$  associés à la valeur propre 1, on a:

$$(v(l), (s_n(l)), (s'_n(l))) \rightarrow (v, (s_n), (s'_n)).$$

Les coefficients  $s_n(l)$  et  $s'_n(l)$  vérifient des relations

$$|s_n(l)| = \frac{2|v(l)|}{\lambda^n},$$

$$|s'_n(l)| = \frac{2|v'(l)|}{\lambda^n}.$$

Il existe donc des constantes  $C > 0$  et  $\lambda_0 > 1$  telles que pour tout  $n \geq 1$  et tout  $l$ ,

$$|s_n(l)|, |s'_n(l)| < \frac{C}{\lambda_0^n}.$$

Fixons un entier  $N \geq 1$ . Si  $l$  est assez grand,  $\eta_1(l), \dots, \eta_N(l)$  et  $\eta'_1(l), \dots, \eta'_N(l)$  coïncident avec  $\eta_1, \dots, \eta_N$  et  $\eta'_1, \dots, \eta'_N$  respectivement. On en déduit

$$\begin{aligned} \int |h - h(l)| dm &\leq |v - v(l)| + \sum_{n=1}^N (|s_n| d(c_n, c_n(l)) + |s'_n| d(c'_n, c'_n(l))) \\ &+ \sum_{n=1}^N (|s_n - s_n(l)| + |s'_n - s'_n(l)|) + \frac{2C}{\lambda_0^N (\lambda_0 - 1)} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque  $N$  et  $l$  tendent vers  $+\infty$ . Par conséquent  $(h(l))$  converge vers  $h$  dans  $L^1$ . On procède de même dans chaque  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ .  $\square$

### Remarques 4.2.

1. Bien sûr, la continuité est fausse sur  $L^\infty$  ou  $\text{BV}$ .
2. On pourrait envisager d'adapter cette démonstration aux applications affines par morceaux finalement dilatantes ayant un nombre fixé de points critiques. Ce résultat était déjà connu dans  $L^1$  (voir [Ga]). La démonstration utilisait les méthodes de V. Baladi et L.-S. Young [BY].

## 5 Régularité de $\rho_0$

### 5.1 Quelques estimées

#### 5.1.1 Vitesses des orbites critiques

**Lemme 3.** Pour tout  $\lambda \geq 3$  et  $\omega$ , pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\frac{\lambda^n - 2\lambda^{n-1} + 1}{\lambda - 1} \leq \left| \frac{\partial}{\partial \omega} c_n \right|, \left| \frac{\partial}{\partial \omega} c'_n \right| \leq \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}.$$

**Démonstration.** Il suffit de remarquer que

$$\frac{\partial}{\partial \omega} c_0, \frac{\partial}{\partial \omega} c'_0 = 0$$

puis pour  $n \geq 0$ ,

$$\left| \left| \frac{\partial}{\partial \omega} c_{n+1} \right| - \left| \lambda \frac{\partial}{\partial \omega} c_n \right| \right| = 1,$$

$$\left| \left| \frac{\partial}{\partial \omega} c'_{n+1} \right| - \left| \lambda \frac{\partial}{\partial \omega} c'_n \right| \right| = 1$$

$\square$

### 5.1.2 Contrôle de la densité

**Lemme 4.** Fixons un choix de paramètre  $(\lambda, \omega)$  et de symboles admissibles  $(\eta_n)$  et  $(\eta'_n)$ . Si  $(v, (s_n), (s'_n))$  est le point fixe de  $\widehat{\mathcal{L}}$  normalisé par  $I$ , et si  $v' = e_{c'_0}(v, (s_n), (s'_n))$ , alors

$$1 - \frac{2}{\lambda} \leq v, v' \leq 1 + \frac{3}{\lambda - 3}.$$

**Démonstration.** Puisque le point fixe  $(v, (s_n), (s'_n))$  est obtenu comme limite de la suite  $(\widehat{\mathcal{L}}^k(1, 0, 0))$ , il appartient à  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ . On rappelle les relations suivantes:

$$|s_n| = \frac{2|v|}{\lambda^n}$$

$$|s'_n| = \frac{2|v'|}{\lambda^n}.$$

On a par définition de  $e_{c'_0}$  et de  $E(u)$

$$v' - v = \sum_{\eta_n=1} s_n + \sum_{\eta'_n=1} s'_n = - \sum_{\eta_n=-1} s_n - \sum_{\eta'_n=-1} s'_n$$

donc

$$|v - v'| \leq \frac{|v| + |v'|}{\lambda - 1}. \quad (5.1)$$

Ceci implique que  $v$  et  $v'$  sont de même signe. Puisque  $I(v, (s_n), (s'_n)) = 1$ ,  $v$  et  $v'$  sont positifs. On pose donc  $v^- = \min(v, v')$  et  $v^+ = \max(v, v')$ . On écrit (5.1) sous la forme:

$$\left(1 - \frac{2}{\lambda}\right) v^+ \leq v^- \leq v^+. \quad (5.2)$$

Si l'on pose  $h = i(v, (s_n), (s'_n))$ , on obtient

$$2(\max(h) - v^-) \leq \sum_{n \geq 1} (|s_n| + |s'_n|) \leq 2 \frac{|v| + |v'|}{\lambda - 1}.$$

Par conséquent, utilisant  $\max(h) \geq 1$ ,

$$1 \leq \max(h) \leq \frac{\lambda v^-}{\lambda - 2}. \quad (5.3)$$

Puisque  $I(v, (s_n), (s'_n)) = 1$ , il existe un point en lequel  $h$  prend une valeur majorée par 1. On en déduit

$$(v^+ + v^- - 2) \leq \sum_{n \geq 1} (|s_n| + |s'_n|) \leq 2 \frac{v^+ + v^-}{\lambda - 1}.$$

Ceci implique avec (5.2),

$$2(1 - \frac{1}{\lambda})v^+ \leq v^+ + v^- \leq 2\frac{\lambda - 1}{\lambda - 3}.$$

Ceci implique avec (5.3) le résultat cherché.  $\square$

### 5.1.3 Estimée de convergence

Nous améliorons la proposition 2 en donnant une borne grossière mais explicite sur le trou spectral. Elle n'est d'ailleurs utile qu'avec de grandes valeurs de  $\lambda$ .

**Lemme 5.** *Si l'on suppose  $\lambda \geq 3$  et  $1 < u < \min(2, \frac{\lambda}{2})$ , le spectre de  $\widehat{\mathcal{L}}$  non périphérique est contenu dans le disque  $D(0, \frac{4}{\lambda})$ .*

**Démonstration.** Notons  $E_0(u)$  le noyau de  $I$  dans  $E(u)$ . Puisque  $\widehat{\mathcal{L}}$  préserve  $E_0(u)$  et que les points fixes non nuls de  $\widehat{\mathcal{L}}$  ne sont pas dans  $E_0(u)$ , il suffit d'estimer le rayon spectral de  $\widehat{\mathcal{L}}$  en restriction à  $E_0(u)$ .

Notons  $S = (v, (s_n), (s'_n))$  un élément de  $E_0(u)$  et  $R = (w, (r_n), (r'_n))$  son image par  $\widehat{\mathcal{L}}$ . On a:

$$\sum_{n \geq 1} (|r_n| + |r'_n|)u^n \leq \frac{u}{\lambda} \|(v, (s_n), (s'_n))\|'.$$

Si  $w$  et  $w'$  sont de signes contraires,

$$2(|w| + |w'|) \leq \sum_{n \geq 1} (|r_n| + |r'_n|).$$

Sinon, on peut les supposer tout deux positifs. Puisque  $I(R) = 0$ , il existe au moins un point du cercle pour lequel  $h = i(R)$  prend une valeur négative. Par conséquent,

$$|w| + |w'| \leq \sum_{n \geq 1} (|r_n| + |r'_n|).$$

On obtient dans tous les cas:

$$\|(w, (r_n), (r'_n))\|' \leq \frac{u+2}{\lambda} \|(v, (s_n), (s'_n))\|'.$$

On utilise ensuite  $u \leq 2$ .  $\square$

### 5.2 Régularité Hölder de $\rho_0$

Il y a des choix pour  $\widehat{\mathcal{L}}$  qui sont meilleurs que d'autres:

**Lemme 6.** Soient  $\lambda \geq 3$  et  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ . Il existe des opérateurs de Perron-Frobenius symboliques  $\widehat{\mathcal{L}}(\omega_0^+)$  et  $\widehat{\mathcal{L}}(\omega_0^-)$  pour  $f_{\lambda, \omega_0}$ , tels que

- Pour toute suite croissante  $(\omega(l))$  convergeant vers  $\omega_0$  et toute suite d'opérateurs  $\widehat{\mathcal{L}}(l)$  associés à  $f_{\lambda, \omega(l)}$ ,  $\widehat{\mathcal{L}}(l) \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}(\omega_0^-)$ .
- Pour toute suite décroissante  $(\omega(l))$  convergeant vers  $\omega_0$  et toute suite d'opérateurs  $\widehat{\mathcal{L}}(l)$  associés à  $f_{\lambda, \omega(l)}$ ,  $\widehat{\mathcal{L}}(l) \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}(\omega_0^+)$ .

**Démonstration.** D'après le lemme 3 et par récurrence, nous remarquons que pour tout  $n \geq 1$ , les paramètres  $\omega$  pour lesquels  $\{c_n, c'_n\}$  et  $\{c_0, c'_0\}$  s'intersectent est un ensemble discret. Il suit que pour  $\omega(l) \neq \omega_0$  suffisamment proche de  $\omega_0$ ,  $c_n$  et  $c'_n$  ne sont pas dans  $\{c_0, c'_0\}$ . Par conséquent, les limites à droite et à gauche en  $\omega_0$  de  $\widehat{\mathcal{L}}$  existent et définissent les opérateurs de Perron-Frobenius symboliques  $\widehat{\mathcal{L}}(\lambda, \omega_0^-)$  et  $\widehat{\mathcal{L}}(\lambda, \omega_0^+)$ .  $\square$

Comme précédemment, nous notons  $h(f_{\lambda, \omega})$  la densité de l'application  $f_{\lambda, \omega}$ . Nous améliorons le corollaire 2:

**Proposition 4.** Pour toute pente  $\lambda > 3$ , tout  $1 \leq p < \infty$  et tout  $0 < \alpha < 1$ , l'application  $\omega \mapsto h(f_{\lambda, \omega})$  à valeurs dans  $L^p$  est höldérienne d'exposant  $\alpha$ . Plus précisément elle admet un module de continuité  $\omega \mapsto C\omega|\log(\omega)|$ ,  $C > 0$ .

**Démonstration.** La proposition 2 et la remarque 4.1.2 entraînent par compacité l'existence de constantes  $0 < \tau < 1$  et  $C > 0$  telles que pour tout  $\omega$ ,

$$\|\widehat{\mathcal{L}}^k(\lambda, \omega^+).(1, 0, 0) - (v, (s_n), (s'_n))(\lambda, \omega^+)\| \leq C\tau^k.$$

(On a une estimée analogue en  $\omega^-$ .)

Reprendons la démonstration du corollaire 2: on approche les densités  $h$  par  $i \circ \widehat{\mathcal{L}}^k.(1, 0, 0)$ , on pose  $\widehat{\mathcal{L}}^k.(1, 0, 0) = (v(k), (s_n(k)), (s'_n(k)))$  et  $h_k = \mathcal{L}^k.1$ . Nous obtenons

$$\int |h(\omega_1) - h(\omega_2)| \leq \int |h_k(\omega_1) - h_k(\omega_2)| + 4C\tau^k.$$

On remarque toujours grâce au lemme 3 que l'intervalle  $[\omega_1, \omega_2]$  est partitionné en un nombre fini d'intervalles  $[\omega(i), \omega(i+1)]$  sur les intérieurs desquels il n'y a pas de collision d'ordre inférieur à  $k$  (voir la section 3.1.2). Il est alors facile de voir que  $\widehat{\mathcal{L}}^k(\omega).(1, 0, 0)$  ne dépend pas de  $\omega \in ]\omega(i), \omega(i+1)[$ . On en déduit pour chaque  $i$

$$\int |h_k(\omega(i)) - h_k(\omega(i+1))| \leq \sum_{n=1}^k \left( |s_n(k)| \left| \frac{\partial}{\partial \omega} c_n \right| + |s'_n(k)| \left| \frac{\partial}{\partial \omega} c'_n \right| \right) |\omega(i) - \omega(i+1)|.$$

puis

$$\int |h(\omega_1) - h(\omega_2)| \leq \sum_{n=1}^k \frac{C}{\lambda^n} \left( \left| \frac{\partial}{\partial \omega} c_n \right| + \left| \frac{\partial}{\partial \omega} c'_n \right| \right) |\omega_1 - \omega_2| + 4C\tau^k.$$

Soit d'après le lemme 3:

$$\int |h(\omega_1) - h(\omega_2)| \leq Ck|\omega_1 - \omega_2| + 4C\tau^k.$$

Si l'on a choisi  $k$  tel que  $\tau^{k+1} < \omega_1 - \omega_2 \leq \tau^k$ , on obtient

$$\int |h(\omega_1) - h(\omega_2)| \leq C|\omega_1 - \omega_2| \log |\omega_1 - \omega_2|$$

pour une nouvelle constante  $C > 0$ . La démonstration est la même dans chaque espace  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ .  $\square$

Pour étudier  $\rho_0$ , nous introduisons la fonction  $\phi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\phi(x) = \tilde{f}_{\lambda,0}(\tilde{x}) - \tilde{x}$ . Elle est définie à partir de la fonction  $\tilde{\phi}$ , 1-périodique sur  $\mathbb{R}$ ,  $\tilde{\phi}$  telle que:

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \begin{cases} (\lambda - 1)\tilde{x} & \text{si } 0 \leq \tilde{x} \leq \frac{\lambda + 1}{2\lambda}, \\ (-\lambda - 1)\tilde{x} & \text{si } \frac{-\lambda + 1}{2\lambda} \leq \tilde{x} \leq 0 \end{cases}$$

et ne dépend pas de  $\omega$ . On remarque que

$$\rho_0 = \int (\phi + \omega) dm,$$

et en appliquant ce qui précède dans  $L^1$ , on en déduit:

**Proposition 5.** *Pour toute pente  $\lambda \geq 3$ , et tout  $0 < \alpha < 1$ , l'application  $\omega \mapsto \rho_0(f_{\lambda,\omega})$  est höldérienne d'exposant  $\alpha$ . Plus précisément elle admet un module de continuité  $\omega \mapsto C\omega|\log(\omega)|$ ,  $C > 0$ .*

Ceci nous permet de montrer

**Proposition 6.** *Pour toute pente  $\lambda \geq 3$ , et toute partie  $\mathcal{R}$  de  $\mathbb{R}$  de mesure de Lebesgue strictement positive, l'ensemble  $\Omega$  des paramètres  $\omega \in \mathbb{R}$  pour lesquels  $\rho_0(f_{\lambda,\omega}) \in \mathcal{R}$  est de dimension de Hausdorff un. En particulier l'ensemble des valeurs de  $\omega$  pour lesquelles  $\rho_0(f_{\lambda,\omega})$  est irrationnel a dimension de Hausdorff un. Plus précisément, si  $\mathcal{R}$  est une partie de  $\mathbb{R}$  de dimension de Hausdorff  $\beta$  pour  $0 < \beta \leq 1$ , l'ensemble des paramètres  $\omega \in \mathbb{R}$  pour lesquels  $\rho_0(f_{\lambda,\omega}) \in \mathcal{R}$  a dimension de Hausdorff au moins  $\beta$ .*

**Démonstration.** Ceci résulte simplement du fait suivant: l'image d'un ensemble de dimension de Hausdorff  $\beta < 1$  par une application höldérienne d'exposant  $\alpha$  est de dimension de Hausdorff au plus  $\frac{\beta}{\alpha}$  (voir par exemple [F]). On utilise ensuite que  $\rho_0$  est surjective.  $\square$

On rappelle que dans des cadres différents (voir [G91, GrŚ]), J. Graczyk et G. Świątek ont également montré une régularité Hölder pour leur application  $\rho$ .

**Remarque 5.1.** Nous allons voir que la fonction  $\omega \mapsto \rho_0(f_{\lambda,\omega})$  n'est en général pas lipschitzienne. Peut-on montrer cependant pour  $\rho_0$  des propriétés de régularité meilleures que celle d'être Hölder pour tout exposant  $\alpha < 1$  ?

Rappelons ainsi qu'une fonction  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans lui-même est dans la classe Zygmund s'il existe  $C > 0$  tel que pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ ,

$$|g(x + \varepsilon) + g(x - \varepsilon) - 2g(x)| \leq C\varepsilon.$$

C'est une classe plus large que les applications lipschitziennes. On constate d'après la proposition 5 que le module de continuité de  $\rho_0$  est celui d'une application Zygmund, ce qui nous incite à poser la question suivante:

*Les applications  $\omega \mapsto \rho_0(f_{\lambda,\omega})$  sont-elles dans la classe Zygmund ?*

### 5.3 $\rho_0$ n'est pas lipschitzienne

Nous avons vu que les fonctions  $\omega \mapsto \rho_0$  sont höldériennes pour tout exposant strictement plus petit que 1. Nous montrons ici qu'elles ne sont généralement pas lipschitziennes:

**Proposition 7.** *Il existe des paramètres  $(\lambda, \omega_0)$  avec  $\lambda$  arbitrairement grand tels que les taux d'accroissement en  $\omega_0$  de l'application  $\omega \mapsto \rho_0(\lambda, \omega)$  ne soient pas bornés.*

#### Démonstration.

- Pour  $M$ , entier suffisamment grand, et  $8M - 4 < \lambda \leq 8M + 4$ , il existe  $c_0 \leq \tilde{p} \leq \tilde{q} \leq c'_0$  vérifiant

$$\tilde{f}_{\lambda,\omega}(\tilde{p}) = \tilde{p} + M \text{ et } \tilde{f}_{\lambda,\omega}(\tilde{q}) = \tilde{q} + 2M.$$

On en déduit que  $\tilde{p}$  et  $\tilde{q}$  sont respectivement proches de  $\frac{1}{8}$  et  $\frac{1}{4}$ . On choisit alors  $(\lambda, \omega_0)$  pour avoir

$$\tilde{f}_{\lambda,\omega_0}(0) = \tilde{p},$$

$$\tilde{f}_{\lambda,\omega_0}\left(\frac{\lambda+1}{2\lambda}\right) = \tilde{q} + 4M.$$

Et donc pour tout  $n \geq 1$ ,  $c_n = p$  et  $c'_n = q$  en  $(\lambda, \omega_0)$ . Nous noterons  $\rho_0(\omega) = \rho_0(f_{\lambda,\omega})$ .

- D'après le lemme 3, il existe une constante  $C_0 > 0$  indépendante de  $\lambda$  telle que pour tout entier  $N \geq 1$  et tout paramètre  $\omega$  avec

$$|\omega - \omega_0| \leq \frac{C_0}{\lambda^{N-1}}, \tag{5.4}$$

on obtienne pour tout  $1 \leq n \leq N$

$$\frac{3}{32} \leq c_n \leq \frac{5}{32} \text{ et } \frac{7}{32} \leq c'_n \leq \frac{9}{32}. \tag{5.5}$$

- Pour  $k \geq 1$ , nous posons  $h(k) = \mathcal{L}^k \cdot 1$ . On calcule une valeur approchée de  $\rho_0$  en posant

$$\rho_0(k) - \omega = \int_{\mathbb{T}^1} \phi h(k) dm.$$

(La fonction  $\phi$  a déjà été introduite pour démontrer la proposition 5.) Comme précédemment, nous notons

$$\widehat{\mathcal{L}}^k \cdot (1, 0, 0) = (v(k), (s_n(k)), (s'_n(k)))$$

et

$$v'(k) = e_{c'_0}(v(k), (s_n(k)), (s'_n(k))).$$

D'après le lemme 4, pour  $\lambda$  grand et  $k > k_0(\lambda)$  suffisamment grand,  $v(k)$  et  $v'(k)$  sont arbitrairement proches de 1. On en déduit que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\lambda^n |s_n(k+n)|$  et  $\lambda^n |s'_n(k+n)|$  sont proches de 2. Les formules de récurrence

$$s_{n+1}(k+1) = \frac{\eta_n s_n(k)}{\lambda},$$

$$Dc_{n+1} = \eta_n \lambda Dc_n + 1,$$

montrent que pour tout  $k - n \geq k_0(\lambda)$ ,  $\lambda s_n(k) Dc_n$  et  $-\lambda s'_n(k) Dc'_n$  sont positifs et arbitrairement proches de 2 d'après le lemme 3:

$$\frac{7}{4} \leq (\lambda - \eta_n) s_n(k) Dc_n, \quad -(\lambda - \eta'_n) s'_n(k) Dc'_n \leq \frac{9}{4} \quad (5.6)$$

Il existe également une constante  $B > 0$  indépendante de  $\lambda$  qui donne pour tout  $n, k \geq 1$  une borne plus grossière:

$$(\lambda + 1) |s_n(k) Dc_n|, \quad (\lambda + 1) |s'_n(k) Dc'_n| < B. \quad (5.7)$$

- Nous allons fixer deux entiers  $N, k \gg 1$  avec  $N < k - k_0(\lambda)$  et approcher les taux d'accroissement  $\frac{\rho_0(k)(\omega) - \rho_0(k)(\omega_0)}{\omega - \omega_0}$  pour  $\omega$  appartenant à

$$[\omega_0 - C_0 \lambda^{-(N-1)}, \omega_0 + C_0 \lambda^{-(N-1)}]. \quad (5.8)$$

Comme pour la démonstration de la proposition 4, l'intervalle (5.8) peut être partitionné en un nombre fini d'intervalles sur l'intérieur desquels il n'y a pas de collision d'ordre inférieur ou égal à  $k$ . Sur un tel intervalle  $[\omega_i, \omega_{i+1}]$ ,  $\rho_0(k)$  est de la forme:

$$\begin{aligned} \rho_0(k)(\omega) &= \rho_0(k)(\omega_i) \\ &+ \sum_{n=1}^k \left( s_n(k)(c_n(\omega) - c_n(\omega_i))(\eta_n \lambda - 1) \frac{c_n(\omega) + c_n(\omega_0)}{2} \right. \\ &\quad \left. + s'_n(k)(c'_n(\omega) - c'_n(\omega_i))(\eta'_n \lambda - 1) \frac{c'_n(\omega) + c'_n(\omega_i)}{2} \right), \end{aligned}$$

avec la convention

$$\frac{1-\lambda}{2\lambda} < c_n, c'_n \leq \frac{1+\lambda}{2\lambda}.$$

Il est alors facile de voir que sur l'intervalle (5.8)  $D\rho_0(k)$  est constante par morceaux et de la forme:

$$D\rho_0(k) = \sum_{n=1}^k (s_n(k)(\eta_n\lambda - 1)c_n Dc_n + s'_n(k)(\eta'_n\lambda - 1)c'_n Dc'_n). \quad (5.9)$$

On déduit de (5.5), (5.6), (5.7) et de (5.9) l'estimation

$$D\rho_0(k) \leq -\frac{1}{16}N + 2B(k-N) \leq -\frac{1}{16}k + 3B(k-N). \quad (5.10)$$

- D'après les sections 4.1 et 5.1.3, si  $\lambda$  est suffisamment grand, il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que pour  $\omega$  proche de  $\omega_0$  et pour tout  $k \geq 1$ ,

$$|\rho_0(k) - \rho_0(\omega)| \leq C_1 \left(\frac{4}{\lambda}\right)^k.$$

- On fixe une valeur de  $\omega$  et on définit  $N$  et  $k$  par:

$$\begin{aligned} C_0 \frac{1}{\lambda^N} &< \omega \leq C_0 \frac{1}{\lambda^{N-1}}, \\ C_1 \left(\frac{4}{\lambda}\right)^{k+1} &< \omega \leq C_1 \left(\frac{4}{\lambda}\right)^k. \end{aligned}$$

Nous obtenons:

$$k - N \leq \frac{\log 4}{\log \lambda} k + \frac{\log(C_1 C_0^{-1})}{\log \lambda}. \quad (5.11)$$

Puis en utilisant les formules (5.10) et (5.11),

$$\frac{\rho_0(\omega) - \rho_0(\omega_0)}{\omega - \omega_0} \leq \left(-\frac{1}{16} + 3B \frac{\log 4}{\log \lambda}\right) k + C.$$

pour une nouvelle constante  $C > 0$ .

- Finalement en ayant choisi  $\lambda$  suffisamment grand, on voit que les taux d'accroissement de  $\rho_0$  en  $(\lambda, \omega_0)$  ne sont pas majorés.  $\square$

## Remarques 5.2.

1. La démonstration montre que le module de continuité de la proposition 5 est optimal.
2. On peut montrer que les fonctions  $\rho_0(k)$  qui nous ont permis d'approcher  $\rho_0$  sont des fonctions spline d'ordre 2.
3. Cette démonstration prouve à nouveau que  $\omega \mapsto \rho_0(f_{\lambda, \omega})$  n'est en général pas croissante.

**Remerciements.** Je remercie particulièrement J.-C. Yoccoz pour l'intérêt qu'il porte à ce sujet et pour sa lecture attentive du manuscrit. Je n'oublie pas non plus V. Baladi et J. Buzzi pour leurs remarques et leurs conseils.

## References

- [ALM] L. Alsedà, J. Llibre, M. Misiurewicz, *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, World Scientific Publishing Co. (1993).
- [Ar] V. Arnol'd, *Small denominators I: Mapping the circle onto itself*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **25** (1961), 21–86. Voir aussi: Translations Amer. Math. Soc. 2<sup>nd</sup> série, **46** (1965), 213–284.
- [BY] V. Baladi, L-S. Young, *On the spectra of randomly perturbed expanding maps*, Commun. Math. Phys., **156** (1993), 355–385. Voir aussi: *Erratum*, Commun. Math. Phys., **166** (1994), 219–220.
- [CGT] A. Chenciner, J.-M. Gambaudo, C. Tresser, *Une remarque sur la structure des endomorphismes de degré 1 du cercle*, C.R. Acad. Sci. Paris Série I, **299** (1984), 145–147.
- [Cr] S. Crovisier, *Nombre de rotation et dynamique faiblement hyperbolique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris-Sud (2001), Orsay.
- [DS] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear operators. Part I*, John Wiley & Sons (1958).
- [F] K. Falconer, *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons (1990).
- [Ga] R. Galeeva, *Stability of the densities of invariant measures for piecewise affine expanding non-renormalizable maps*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **66** (1997), 137–144.
- [GhS] É. Ghys, V. Sergiescu, *Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle*, Comment. Math. Helv., **62** (1987), 185–239.
- [G91] J. Graczyk, *Harmonic scaling for smooth families of diffeomorphisms of the circle*, Nonlinearity, **4** (1991), 935–959.
- [G93] J. Graczyk, *Linearizable circle diffeomorphisms in one-parameter families*, Bol. Soc. Bras. Mat. (N.S.), **24** (1993), 201–210.
- [GrŚ] J. Graczyk, G. Świątek, *Critical circle maps near bifurcation*, Commun. Math. Phys., **176** (1996), 227–260.

- [H77] M. Herman, *Mesure de Lebesgue et nombre de rotation*, in *Geometry and topology*, Lecture Notes in Mathematics **597**, Springer Verlag, Berlin (1977), 271–293.
- [H79] M. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **49** (1979), 5–233.
- [J] M. Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Commun. Math. Phys., **81** (1981), 39–88.
- [LaY] A. Lasota, J. Yorke, *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Trans. Am. Math. Soc., **186** (1973), 481–488.
- [Le] F. Ledrappier, *Some properties of absolutely continuous invariant measures on an interval*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **1** (1981), 77–93.
- [MT] J. Milnor, W. Thurston, *On iterated maps of the interval*, in *Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics, **1342**, Springer Verlag (1988), 465–563.
- [NPT] S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **57** (1983), 5–72.
- [Sc] H. Schaefer, *Banach lattices and positive operators*, Springer Verlag (1974).
- [Ś88] G. Świątek, *Rational rotation numbers for maps of the circle*, Commun. Math. Phys., **119** (1988), 109–128.
- [Ś89] G. Świątek, *Endpoints of rotation intervals for maps of the circle*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **9** (1989), 173–190.
- [T92] M. Tsujii, *Rotation number and one-parameter families of circle diffeomorphisms*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **12** (1992), 359–363.
- [T93] M. Tsujii, *Positive Lyapunov exponents in families of one-dimensional dynamical systems*, Invent. Math., **111** (1993), 113–137.
- [T00] M. Tsujii, *A simple proof for monotonicity of entropy in the quadratic family*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **20** (2000), 925–933.
- [WY] Q. Wang, L.-S. Young, *Strange attractors with one direction of instability*, Commun. Math. Phys., **218** (2001), 1–92.

**Sylvain Crovisier**  
 Université Paris-Sud  
 Département de Mathématiques, Bâtiment 425  
 F-91405 Orsay cédex  
 FRANCE

E-mail: sylvain.crovisier@math.u-psud.fr